CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA”,

EDIȚIA a XIX-a, BĂILEȘTI, 16 MARTIE 2024

CLASA a X-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1) Rezultatul calculului: $\sqrt[3]{-27} + \log_4 64 - 10^{\lg 2}$ este:

a) -2 b) -3 c) 1 d) 0

2) Se știe că x si y sunt numere reale și că $(2+\sqrt{3})^x < (2-\sqrt{3})^y$. Atunci:

a) $x+y>0$ b) $x+y>1$ c) $x+y<0$ d) $x>y>0$

3) Fie a și b ∈ (0, +∞) astfel încât $a > 6b$ și $2 \cdot \lg(a-6b) = lga + lgb$. Raportul $\frac{a}{b}$ este egal cu:

a) 10 b) 9 c) 2024 d) 1

4) Se considera numărul real a cu proprietatea că numărul $\frac{1-i\cdot\sqrt{3}}{a+(a+1)\cdot i}$ este tot un număr real. Valoarea lui a este:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

5) Numărul de soluții ale inecuației $C_n^5 > C_n^7$ este egal cu:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8

Probleme propuse de prof. Ionuț Ivănescu, Craiova

Partea a II-a (40 puncte):

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete.

Problema 1 (20 puncte)

Demonstrați că dacă p este un număr prim iar n este un număr natural nenul și strict mai mic decât p, atunci p divide numărul $(p-1)! \cdot C_{n+p}^p + 1$.

Prof. Ionuț Ivănescu, Revista “Sfera“ nr. 24

Problema 2 (20 puncte)

Rezolvați ecuația $\log_5 x \cdot \log_4(27-x) = 1$

Prof. Marian Ursărescu, G.M. nr.1/2018

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute.
Din oficiu se acordă : 10 puncte

Barem de evaluare – clasa a X-a

Partea I :1) a 2) c 3) b 4) d 5) a

Partea a II-a:

Problema 1

$(p-1)! \cdot C_{n+p}^{p} + 1 = (p-1)! \cdot \frac{(n+p)!}{n! \cdot p!} + 1 = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+p)}{p} + 1$ …… 2p

Numarul $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+p)$ este produsul a p numere naturale consecutive, deci el se divide cu p……...…...2p

$n < p \Longrightarrow n + p < 2p$. Asadar $n + 1 \leq p < n + p$……..…....2p

Deci unul dintre factorii produsului $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+p)$ este chiar p ……..…..2p

Asadar $\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+p)}{p} = (n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+p)$ este de fapt un produs de p -1 numere naturale diferite care nu se divid cu p si nu pot sa difere intre ele printr – un multiplu de p…….……2p

Impartind fiecare din cele p-1 numere la p se obtin resturile 1, 2, … , p – 1…….……..3p

Deci $(p-1)! \cdot C_{n+p}^{p} + 1 = \mathcal{M}_p + 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(p-1) + 1$ …….……3p

Cum p este prim, conform teoremei lui lui Wilson $\Longrightarrow 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(p-1)+1 = \mathcal{M}_p$ ……3p

In concluzie $(p-1)! \cdot C_{n+p}^{p} + 1 = \mathcal{M}_p$ c.c.t.d. ……..……..…..1p

Problema 2

Fie x o solutie a ecuatiei. Cum $\log_4(27-x)$ si $\log_5 x$ au acelasi semn $\Longrightarrow x \in (1, 26)$ si ambele expresii sunt pozitive …….…..……..2p

Notam $\log_5 x = t > 0 \Longrightarrow \log_4(27-x) = \frac{1}{t}$ 1p

$x = 5^t$ si $27 - x = 4^{\frac{1}{t}} \Longrightarrow 5^t + 4^{\frac{1}{t}} = 27$ ……..……..……1p

Consideram functia $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(t) = 5^t + 4^{\frac{1}{t}}$ ……...…….....1p

Fie $a, b \in (\sqrt{\log_5 4}, +\infty)$ cu $a < b$ …….……..……...1p

$a\cdot b > \log_5 4 \Longrightarrow \frac{1}{b} < a \cdot \log_4 5 \Longrightarrow \frac{1}{b} < \log_4 5^a \Longrightarrow 4^{\frac{1}{b}} < 5^a$ (1) …….…….2p

$a\cdot b > \log_5 4 \Longrightarrow \frac{1}{ab} < \log_4 5 \Longrightarrow 4^{\frac{1}{ab}} < 5 \Longrightarrow$ ……..……..2p

$\Longrightarrow 4^{\frac{b-a}{ab}} < 5^{b-a} \Longrightarrow 0 < 4^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} - 1 < 5^{b-a} - 1$ (2) …….…..... 2p

Din relatiile (1) si (2) $\Longrightarrow 4^{\frac{1}{b}}\left(4^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} - 1\right) < 5^a(5^{b-a}-1) \Longrightarrow 4^{\frac{1}{a}} - 4^{\frac{1}{b}} < 5^b - 5^a \Longrightarrow$….……2p

$\Longrightarrow 5^a + 4^{\frac{1}{a}} < 5^b + 4^{\frac{1}{b}} \Longrightarrow f(a) < f(b)$ ……...……....2p

Deci functia f este strict crescatoare pe $[\sqrt{\log_5 4}, +\infty)$ ……..……....1p

Analog functia f este strict descrescatoare pe $(0, \sqrt{\log_5 4}]$……..1p

Cum $f(2) = 27$ si $f(\log_5 2) = 27$, din injectivitatea lui f pe cele doua intervale deducem ca 2 si $\log_5 2$ sunt singurele solutii ale ecuatiei $f(t) = 27$, adica 25 si 2 sunt singurele solutii ale ecuatiei propuse 2p